

# 電気電子工学I

---

石原尚

知能・機能創成工学専攻 講師 (アンドロイド工学)

# 5/16, 23, 30, 6/6, 13の5回で交流回路を学びます

- 2 交流回路
    - 2.1 正弦波電圧・電流
    - 2.2 正弦波電圧・電流の複素数表示
    - 2.3 交流回路の複素数領域における解析法
    - 2.4 簡単な回路の正弦波定常解析
    - 2.5 複素インピーダンスと複素アドミタンス
    - 2.6 フェーザ図
    - 2.7 共振回路
    - 2.8 交流回路における電力
  - 3 回路の諸定理
    - 3.1 回路の基本的性質
    - 3.2 重ね合わせの理
    - 3.3 テブナン等価回路とノートン等価回路
    - 3.6 ブリッジ回路
    - 3.7 整合
    - 3.8 電力と重ね合わせの理
- 交流回路解析に必要な基礎知識 (5/16)
- 直流回路解析と類似した交流回路の基礎解析 (5/23)
- 交流回路ならではの特性の解析 (5/30)
- 交流回路の解析を簡単にする定理 (6/6)
- 定理の応用例 (6/13)

## 本日学ぶこと

- ① 交流回路とは何か。この講義ではどのような交流回路を扱うか。
- ② この講義では交流回路解析の何を学ぶか。
- ③ 交流回路はどのように表現されるか。
- ④ 交流回路の解析のためになぜ複素数がでてくるのか。

定義

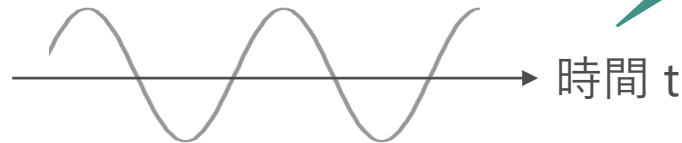
# 交流回路

= **交流波形**の電圧や電流を発生する電源を備える回路

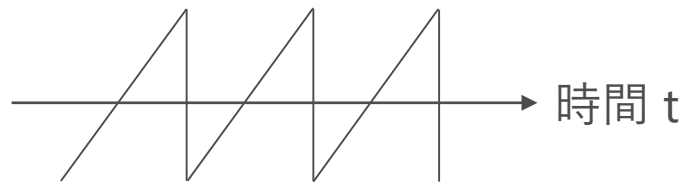
周期変動する波形

交流波形にも様々ある

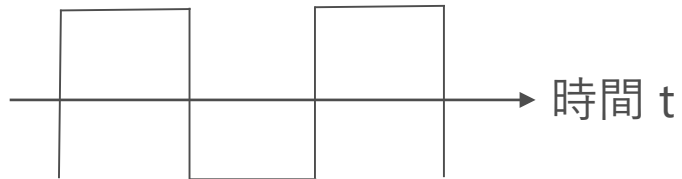
①正弦波



②鋸波



③矩形波

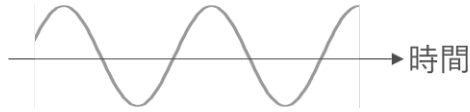


これらが複数混ざった複雑な波形も交流波形

本講義で扱う交流回路

## 正弦波定常状態にある回路

= 正弦波形の電圧・電流を発生する電源を備え、  
かつ定常状態となった回路



### 正弦波形に限定する理由

- ① **数学的に解析が容易だから** (三角関数の理論体系を利用可 & 微積分も正弦波)
- ② 商用電源として最も一般的だから (家庭用電源は正弦波の交流電源)
- ③ 複雑な波形も正弦波の和として示されるから

### 定常状態に限定する理由

- ① **過渡状態の解析より簡単だから**
- ② 回路機能の設計は定常状態を想定するから (電源投入直後は機能OFF)

- **知っておくべきこと**

- 今回解析する交流回路は解析が単純なものに限定していること
- **複素数の導入**によって、正弦波定常状態の**交流回路の解析が実現**されていること
- **フェーザ図**を描くことで**回路の状態を可視化**して理解できること

- **その上でできるようになってもらうこと**

- 直流回路解析との**類似点・相違点を理解し**、正弦波定常状態の**交流回路の解析**（各部で電圧・電流がどんな状態になるか）ができること

基本の表現

交流回路の各部の電圧・電流は、時刻を変数とし、**3つの特性値をもつ正弦関数**で表現される

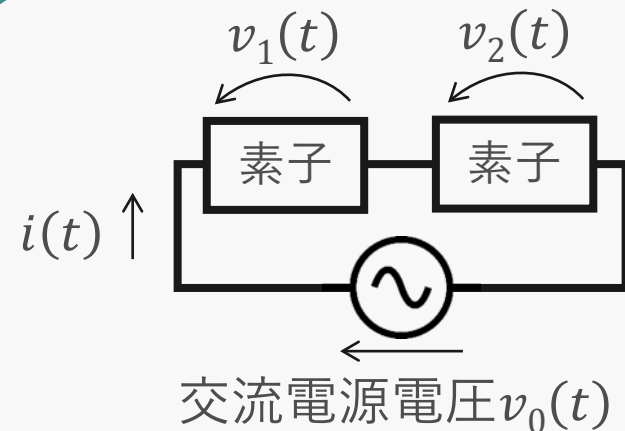
※違いに注意：直流回路の電圧・電流は、ある**値**で表現される

高校物理の復習

交流回路の電圧・電流の表現

$$x(t) = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{振幅} \\ \text{[V] or [A]}}}{A_m} \sin(\underset{\substack{\downarrow \\ \text{角周波数} \\ \text{[rad/s]}}}{\omega t} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{(初期) 位相角} \\ \text{[rad]}}}{\theta})$$

回路各部の電圧・電流の状態は  
全てこの関数で表される



※(t)は自明なので通常省略

# 正弦関数の式と波形の対応は確実に理解しよう

## 電圧・電流の正弦関数の式

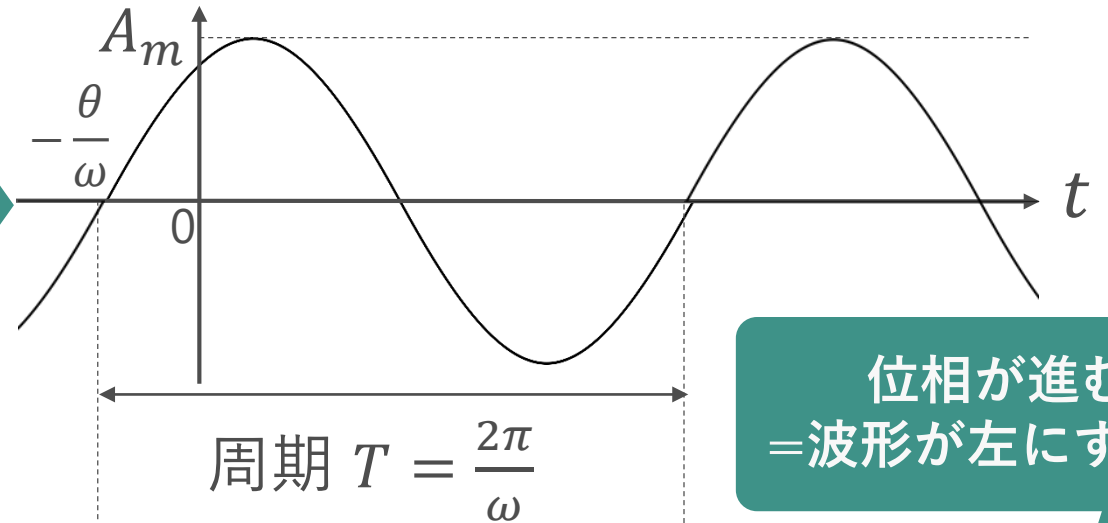
$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$

↓
↓
↓

振幅
角周波数
位相角  
[V] or [A]
[rad/s]
[rad]

一対一  
対応

## 電圧・電流の正弦関数の波形



位相が進む  
= 波形が左にずれる

覚える

振幅の代わりによく使われる

実効値  $|A_m| = \frac{A_m}{\sqrt{2}}$

※〇〇Vの交流はこちらの値

覚える

上記の波形は、 $x(t) = A_m \sin(\omega t)$  に対して位相が「 $\theta$ 進んでいる」と表現する  
 ※位相角の差が正の場合「進んでいる」  
 負の場合「遅れている」  
 差がない場合「同相である」



次の関数で表される電圧の

① 最大値  $V_m$

② 実効値  $|V_m|$

② 各周波数  $\omega$

③ 周期  $T$

④ 周波数  $f$

⑤ 初期位相角  $\theta$

を単位付きで記述しなさい。 ※無理数の割算等は分数のままで構いません

$$v = 120 \sin \left( 34t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ [V]}$$

次の関数で表される電圧の

解答

①最大値  $V_m = 120 \text{ [V]}$

②実効値  $|V_m| = \frac{120}{\sqrt{2}} \text{ [V]}$

②各周波数  $\omega = 34 \text{ [rad/s]}$

③周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{17} \text{ [s]}$

④周波数  $f = \frac{1}{T} = \frac{17}{\pi} \text{ [Hz]}$

⑤初期位相角  $\theta = \frac{\pi}{4} \text{ [rad]}$

を単位付きで記述しなさい。 ※無理数の割算等は分数のままで構いません

$$v = 120 \sin \left( 34t + \frac{\pi}{4} \right) \text{ [V]}$$

$v = A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$  より位相が  $\frac{\pi}{6}$  進んだ正弦関数,

及び  $\frac{\pi}{2}$  遅れた正弦関数をそれぞれ求めよ.

$v = A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$  より位相が  $\frac{\pi}{6}$  進んだ正弦関数,

及び  $\frac{\pi}{2}$  遅れた正弦関数をそれぞれ求めよ.

**解答**

位相が  $\frac{\pi}{6}$  進んだ正弦関数

$$A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

位相が  $\frac{\pi}{2}$  遅れた正弦関数

$$A_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = A_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

状況の限定による解析の簡易化

抵抗， インダクタ， キャパシタのみで構成される  
交流回路においては， 各部の振幅 $A_m$ と位相角 $\theta$ の2つ  
のみを解析すればよい

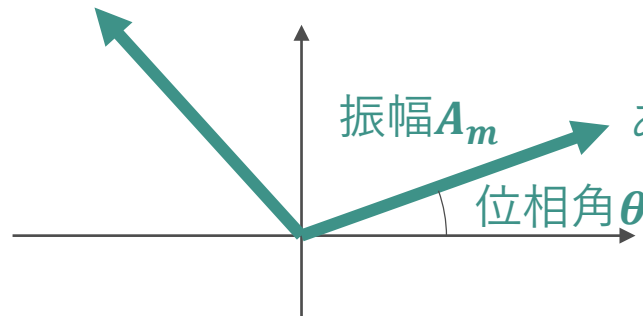
理由：これらの3素子は角周波数 $\omega$ を変えないから

だから

回路各部の状態は極座標系で表現できる

このことが後で  
重要になります

別の部分の電圧 or 電流

振幅 $A_m$ 

ある部分の電圧 or 電流

位相角 $\theta$

## 解析のための工夫

正弦関数を，解析のための各種計算が有利な複素数に変換した上で，交流回路を解析する

波形のイメージに近い交流の表現

$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$



解析に有利な交流の表現

大文字にするのが慣例

$j$ は虚数単位  
※ $i$ だと紛らわしいため

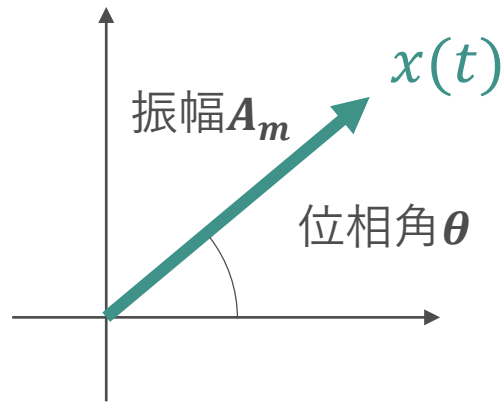
$$X = |A_m| e^{j\theta}$$

振幅の「絶対値」でなく「実効値」であることに注意

なぜ正弦関数と複素数が対応するのか？

# 2次元直交座標上で振幅や位相角の状態や変化が 一対一对応するから

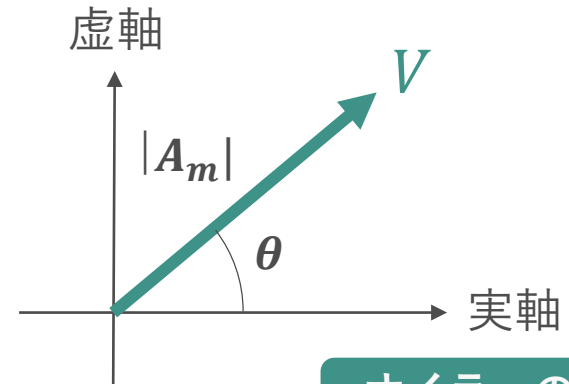
正弦関数の極座標表示



$$x(t) = A_m \sin(\omega t \pm \theta)$$



複素数のフェーザ表示



$$V = |A_m| e^{\pm j\theta}$$

$$= |A_m| \cos \theta \pm j |A_m| \sin \theta$$

オイラーの  
公式

絶対覚える重要な関係

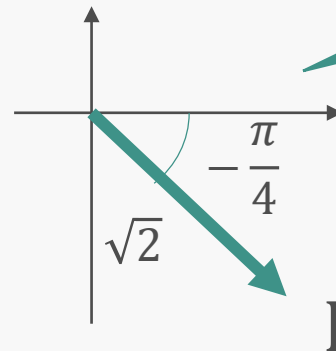
電圧と電流の関数形表示

電圧と電流の複素数表示

$$x(t) = \underset{\text{振幅}}{A_m} \sin(\omega t + \underset{\text{位相角}}{\theta}) \longleftrightarrow X = |A_m| e^{j\theta}$$

変換の例

$$i = 2 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \begin{matrix} A_m = 2 \\ \longleftrightarrow \\ \theta = -\frac{\pi}{4} \end{matrix} I = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$



後の解析のためには  
フェーザも描ける必要あり

これをフェーザ I と呼ぶ



次の正弦波電圧の複素数表示を求め、フェーザを描け

$$3\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow$$

# 次の正弦波電圧の複素数表示を求め、フェーザを描け

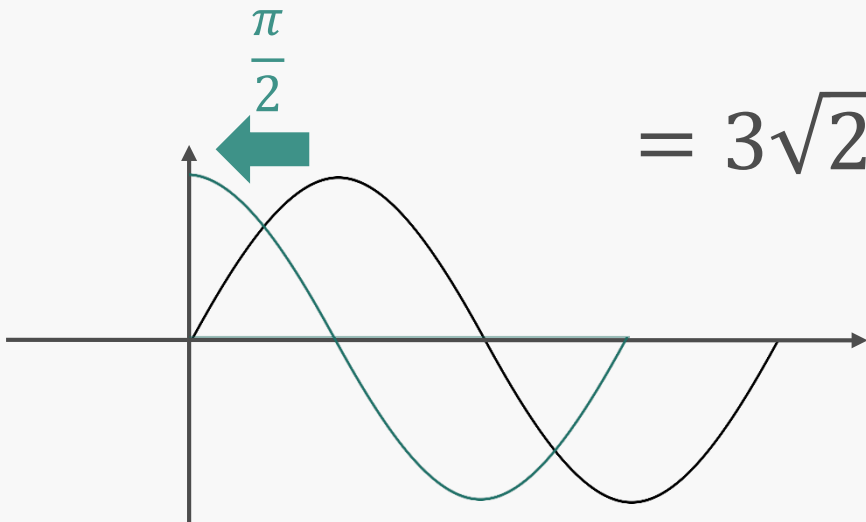
複素数表示

$$3\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow 3e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Cosは、Sinより位相が  $\frac{\pi}{2}$  進んだ波形だから

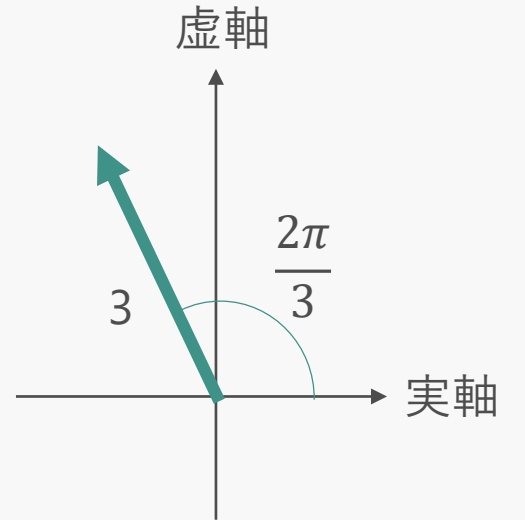
$$= 3\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 3\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right)$$



解答

フェーザ



解析のために知っておくべき性質

正弦波の和（差）の複素数表示は、  
個々の正弦波の複素数表示の和（差）となる

※ただし、各周波数が同じ場合に限る

変換の例

$$\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow e^{j\frac{\pi}{3}} + 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

---

$$= e^{j\frac{\pi}{3}} \qquad = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

直観通りの変換を  
してもよいということ

## 交流回路解析に役立つ複素数表示のメリット①

高校で習った指数計算の通りです

## 正弦波の乗除算が簡潔

$$V_1 V_2 = |A_{m1}| e^{j\theta_1} |A_{m2}| e^{j\theta_2} = |A_{m1}| |A_{m2}| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|A_{m1}| e^{j\theta_1}}{|A_{m2}| e^{j\theta_2}} = \frac{|A_{m1}|}{|A_{m2}|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

## 変換の例

$$v_1 = \sqrt{2} \sin(\omega t) + 2\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow V_1 = 1 + 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$v_2 = 3\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow V_2 = 3e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$$v_1 v_2 = \text{計算も表記も面倒...} \longleftrightarrow V_1 V_2 = 3e^{j\frac{2\pi}{3}} + 6e^{j\frac{5\pi}{6}}$$

簡単な計算ですっきり書ける！

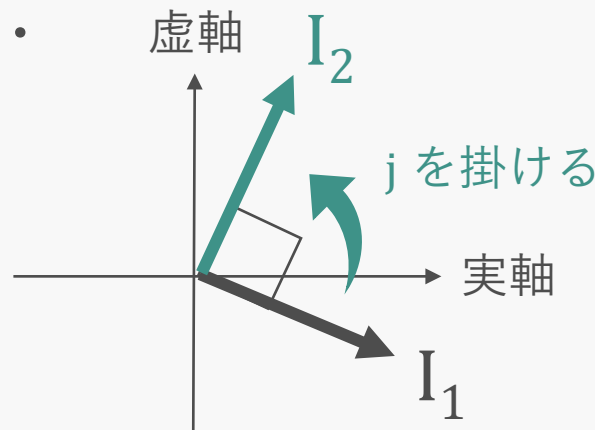
複素数への操作とフェーザの変化の関係① ※高校の範囲の復習

$j$  を掛けると位相が  $\frac{\pi}{2}$  進み,  
 $j$  で割る ( $-j$  を掛ける) と位相が  $\frac{\pi}{2}$  遅れる

$$\times \frac{1}{j} = \frac{j}{jj} = \frac{j}{-1} = -j$$

交流電流  $I_1 = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$  に対して位相が  $\frac{\pi}{2}$  進んだ電流は,

$$I_2 = jI_1 = j\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}} \text{ となる.}$$



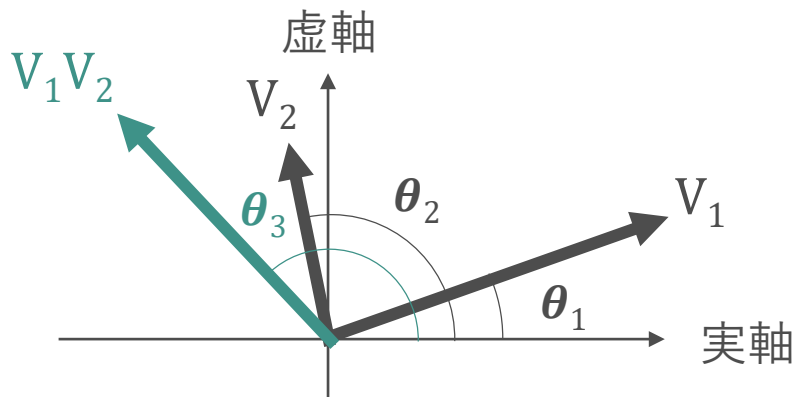
$j$  を4回掛けるのは  
 1を掛けるのと同じなので  
 違和感はないですね

複素数への操作とフェーザの変化の関係② ※今回の授業の前のスライドの内容のおさらい

**複素数の乗算は、実効値を掛け、位相角を足す操作**  
**除算は、実効値を割り、位相角を減じる操作**

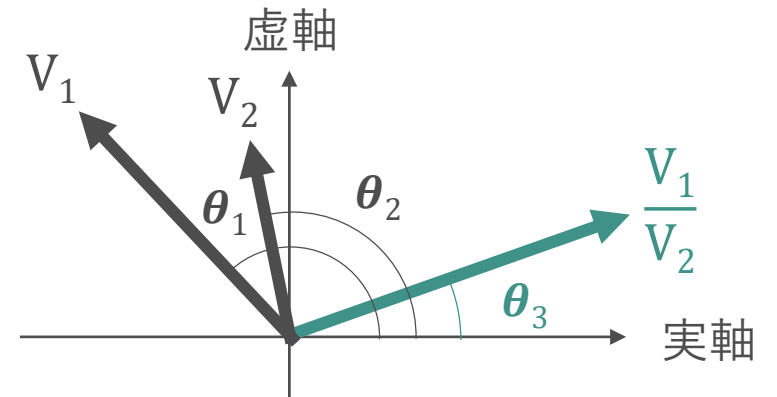
複素数の乗算とフェーザの関係

$$\begin{aligned} V_1 V_2 &= |A_{m1}| e^{j\theta_1} |A_{m2}| e^{j\theta_2} \\ &= |A_{m1}| |A_{m2}| e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$



複素数の除算とフェーザの関係

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|A_{m1}| e^{j\theta_1}}{|A_{m2}| e^{j\theta_2}} = \frac{|A_{m1}|}{|A_{m2}|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$



フェーザ表示を利用して  
次の正弦波電圧の実効値と位相角を求めよ

$$V = \left(1 + j \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{3}{4} + j \frac{3}{4}\right)$$

# フェーザ表示を利用して 次の正弦波電圧の実効値と位相角を求めよ

$$V = \left(1 + j \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{3}{4} + j \frac{3}{4}\right)$$

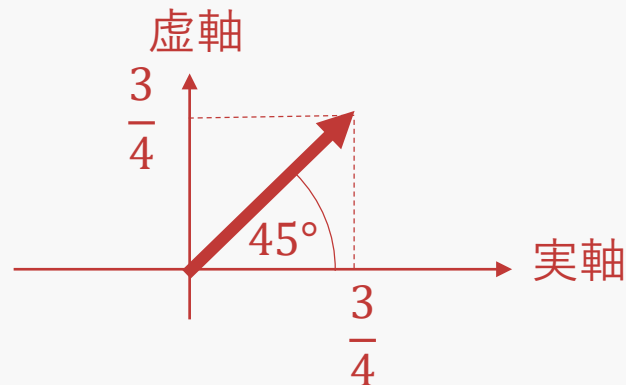
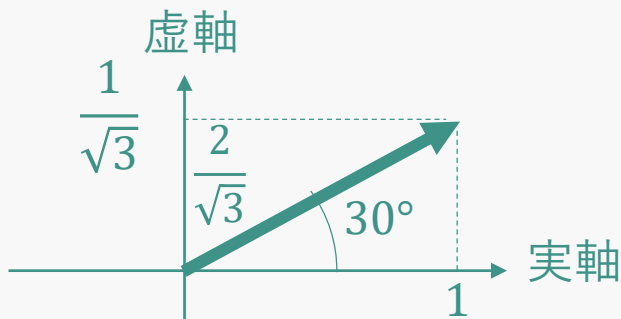
**解答**  $V$ の実効値は  $= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}$   
 $V$ の位相角は  $= \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

実効値は  $\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

実効値は  $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

位相角は  $\frac{\pi}{6}$  ※図より明らか

位相角は  $\frac{\pi}{4}$  ※図より明らか



この例のように図から簡単に位相角が求まるケースは特殊なので、実際は複素数のまま解析を進めます。



交流回路解析に役立つ複素数表示のメリット②

インダクタやキャパシタの電圧・電流特性の計算で活躍します

複素数表示では、微分は  $j\omega$  を掛け、  
積分は  $\frac{1}{j\omega}$  を掛ける操作で済む

$$\frac{d}{dt} X = j\omega X$$

$$\int X = \frac{1}{j\omega} X$$

正弦関数の微分 = 振幅を  $\omega$  倍し位相を  $\frac{\pi}{2}$  進める操作

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sin(\omega t + \theta) &= \omega \cos(\omega t + \theta) \\ &= \omega \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

j を掛ける操作と同じ

正弦関数の積分 = 振幅を  $\frac{1}{\omega}$  倍し位相を  $\frac{\pi}{2}$  遅らせる操作

$$\begin{aligned} \int \sin(\omega t + \theta) dt &= \int \sin \varphi \left( \frac{dt}{d\varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{\omega} \int \sin \varphi d\varphi = -\frac{1}{\omega} \cos \varphi + C \\ &= \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}\right) + C \end{aligned}$$

j で割る操作

## 本日学んでもらったこと

- ① 交流回路とは何か。この講義ではどのような交流回路を扱うか。
- ② この講義では交流回路解析の何を学ぶか。
- ③ 交流回路はどのように表現されるか。
- ④ 交流回路の解析のためになぜ複素数がでてくるのか。