

電気電子工学I

石原尚

知能・機能創成工学専攻 講師（アンドロイド工学）

5/16, 23, 30, 6/6, 13の5回で交流回路を学びます

- 交流回路解析に必要な基礎知識 (5/16)
 - 直流回路解析と類似した交流回路の基礎解析 (5/23)
 - 交流回路ならではの特性の解析 (5/30)
 - 交流回路の解析を簡単にする定理 (6/6)
 - 定理の応用例 (6/13)
- 2 交流回路
 - 2.1 正弦波電圧・電流
 - 2.2 正弦波電圧・電流の複素数表示
 - 2.3 交流回路の複素数領域における解析法
 - 2.4 簡単な回路の正弦波定常解析
 - 2.5 複素インピーダンスと複素アドミタンス
 - 2.6 フェーザ図
 - 2.7 共振回路
 - 2.8 交流回路における電力
 - 3 回路の諸定理
 - 3.1 回路の基本的性質
 - 3.2 重ね合わせの理
 - 3.3 テブナン等価回路とノートン等価回路
 - 3.6 ブリッジ回路
 - 3.7 整合
 - 3.8 電力と重ね合わせの理

前回学んでもらったこと

- ① 交流回路とは何か。この講義ではどのような交流回路を扱うか。
 - 正弦波形の電源を持つ、抵抗、コンデンサ、キャパシタで構成される回路
- ② この講義では交流回路解析の何を学ぶか。
 - 複素数の導入で解析が実現されていること
 - フェーザ図を描くことで回路の状態を可視化して理解できること
- ③ 交流回路はどのように表現されるか。
 - 実効値と位相角の2つの特性値を持つ正弦波。もしくは複素数。
- ④ 交流回路の解析のためになぜ複素数がでてくるのか。
 - 微積分や乗除算などの計算が簡潔に実施できるから

本日学ぶこと

- ① 交流回路の解析の流れが直流回路解析と同じであること.
- ② 解析においてはどのような連立方程式を立てることになるか.
- ③ 解析を楽にする複素インピーダンスとは何か.
- ④ 複素インピーダンスを使った場合の回路解析はどのようなものか.

※今回の資料の入手方法は講義後に紹介しますので、重要ポイントの把握に努めてください

※講義中に練習問題を実施しますので、筆記用具と紙の準備をお願いします

交流回路の解析の手順

直流回路の解析
手順と同じ！

- Step 0 – 電流・電圧・特性値の記号を定義
- Step 1 – 電圧平衡則・電流保存則を立式
- Step 2 – 各素子について電圧・電流特性を立式
- Step 3 – 上記の連立方程式を解く

Step 0

複素数

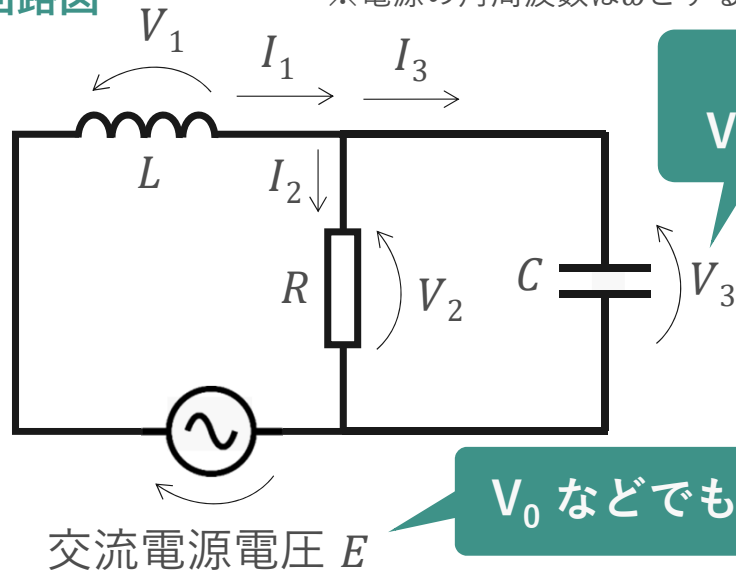
複素数

各素子の電位差, 分岐前後の電流,
各素子の特性値, を記号定義

実数

回路図

※電源の角周波数は ω とする



もちろん
 V_c などでもOK

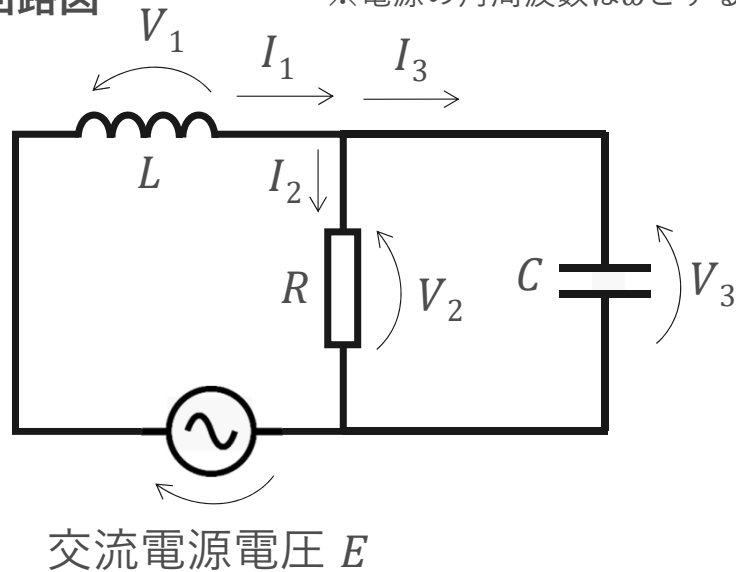
V_0 などでもOK

Step 1

各回路部で電圧平衡則・電流保存則を立式

回路図

※電源の角周波数は ω とする



平衡則・保存則

ある閉路の右回りと左回り電圧の総和は等しい

$$E = V_1 + V_2$$

$$V_2 = V_3$$

ある節点の流入電流と流出電流の総和は等しい

$$I_1 = I_2 + I_3$$

直流回路解析と同じ

KVL方程式 (キルヒホフの電圧平衡則)

KCL方程式 (キルヒホフの電流保存則)

がそのまま使える!

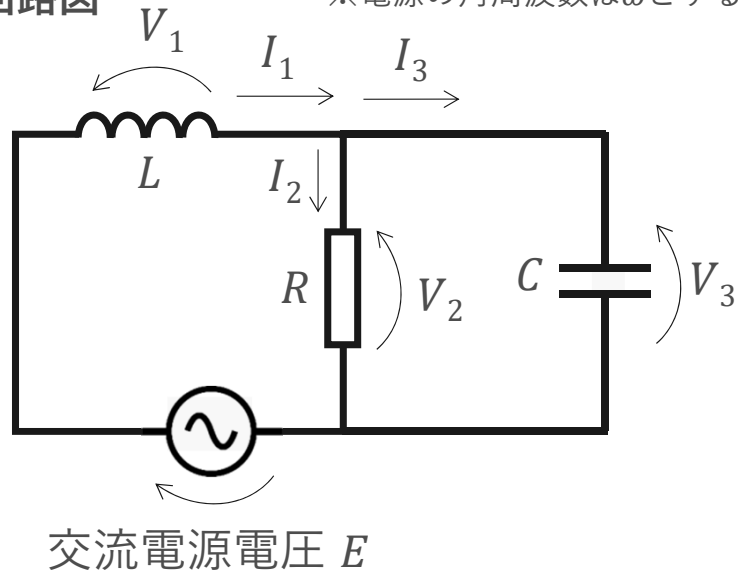
Step 2

各素子について電圧・電流特性を立式

交流回路独自！

回路図

※電源の角周波数は ω とする



平衡則・保存則

ある閉路の右回りと
左回り電圧の総和は等しい

$$E = V_1 + V_2$$

$$V_2 = V_3$$

ある節点の流入電流と
流出電流の総和は等しい

$$I_1 = I_2 + I_3$$

素子の特性式

抵抗

$$V_2 = RI_2$$

キャパシタ

$$V_3 = \frac{1}{j\omega C} I_3$$

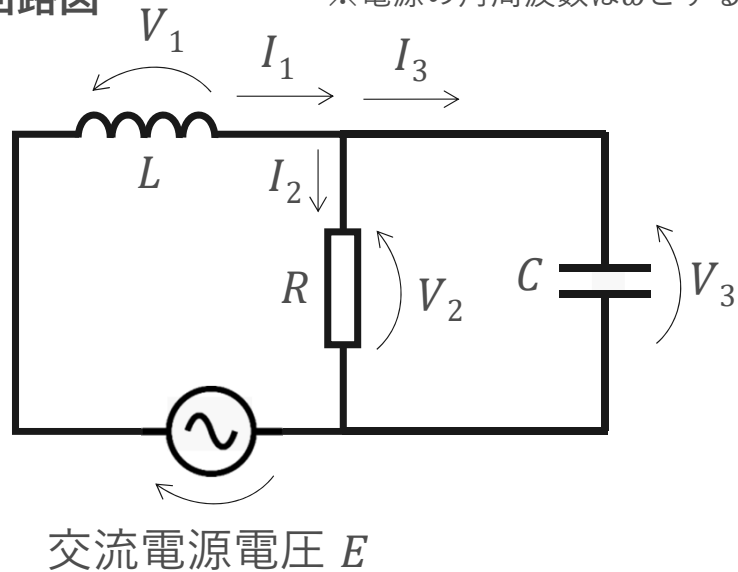
インダクタ

$$V_1 = j\omega LI_1$$

Step 3

連立方程式を解いて所望の部分の複素数表現を得る

回路図

※電源の角周波数は ω とする

平衡則・保存則

ある閉路の右回りと
左回り電圧の総和は等しい

$$E = V_1 + V_2$$

$$V_2 = V_3$$

ある節点の流入電流と
流出電流の総和は等しい

$$I_1 = I_2 + I_3$$

素子の特性式

抵抗

$$V_2 = RI_2$$

キャパシタ

$$V_3 = \frac{1}{j\omega C} I_3$$

インダクタ

$$V_1 = j\omega L I_1$$

解

$$I_1 = ?$$

$$V_2 = ?$$

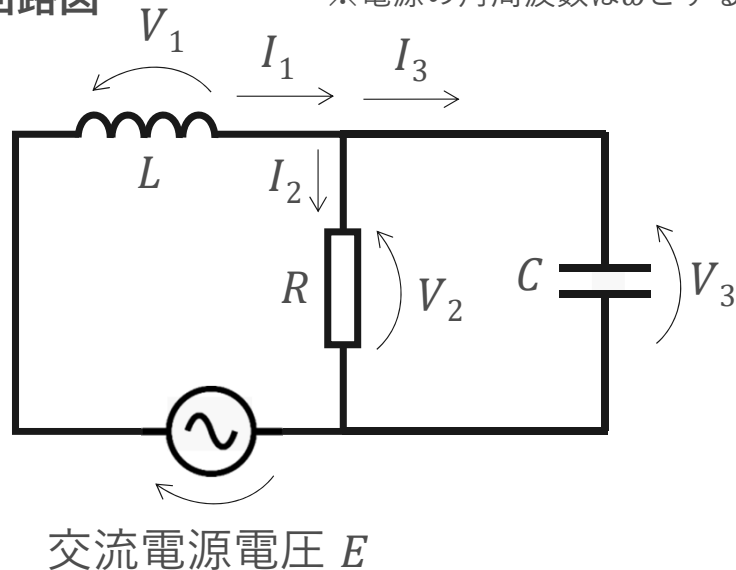
交流回路の解析のために重要な知識

交流回路ならではの素子の特性式の理解が必須

これを知らないといけない

回路図

※電源の角周波数は ω とする



回路の関係式

ある閉路の右回りと
左回り電圧の総和は等しい

$$E = V_1 + V_2$$

$$V_2 = V_3$$

ある節点の流入電流と
流出電流の総和は等しい

$$I_1 = I_2 + I_3$$

素子の特性式

抵抗

$$V_2 = RI_2$$

キャパシタ

$$V_3 = \frac{1}{j\omega C} I_3$$

インダクタ

$$V_1 = j\omega LI_1$$

解

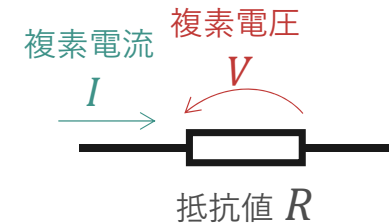
$$I_1 = ?$$

$$V_2 = ?$$

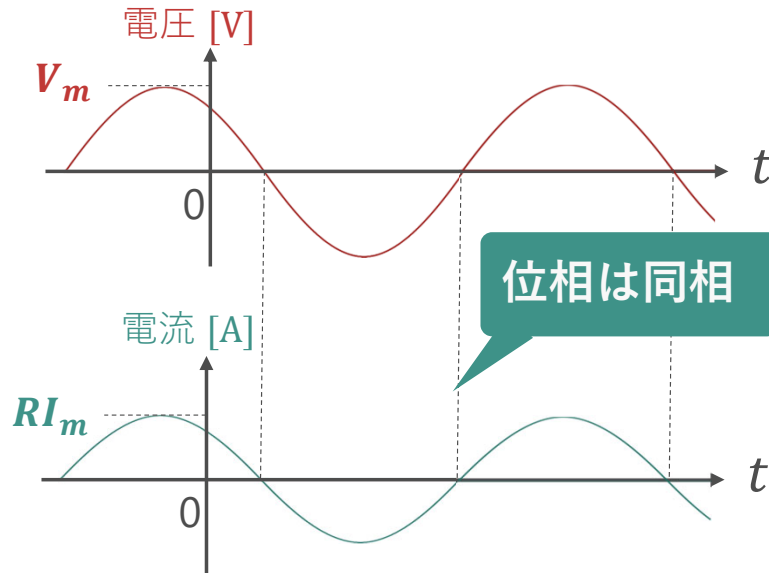
把握しておくべき電圧・電流特性：抵抗

覚える

抵抗においては $V = RI$ が成立



電圧と電流の波形の関係



Q. なぜこの式が成り立つか？

A. 直流同様、全時刻で $v = Ri$ が成り立つから.

電圧を $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$,
電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ とおく.

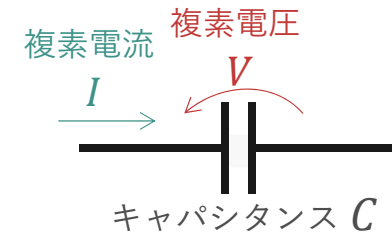
全時刻でオームの法則 $v = Ri$ が成り立つので,
 $|V_m| \sin(\omega t + \varphi) = R|I_m| \sin(\omega t + \theta)$ である.

この式より,
 $|V_m| = R|I_m|$, 及び $\varphi = \theta$ が得られる.

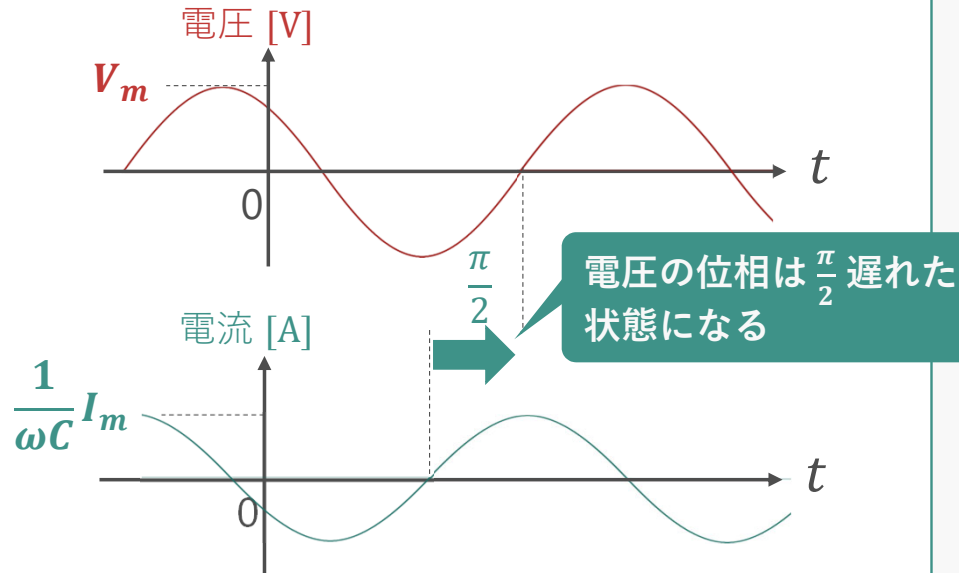
把握しておくべき電圧・電流特性：キャパシタ

覚える

キャパシタでは $V = \frac{1}{j\omega C} I$ が成立



電圧と電流の波形の関係



Q. なぜこの式が成り立つか？

A. 直流同様、全時刻で $i = C \frac{dv}{dt}$ が成り立つから.

電圧を $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$,
電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ とおく.

全時刻で $i = C \frac{dv}{dt}$ が成り立つので,
 $|I_m| \sin(\omega t + \theta) = \omega C |V_m| \cos(\omega t + \varphi)$ 先週出てきた変換
 $= \omega C |V_m| \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ である.

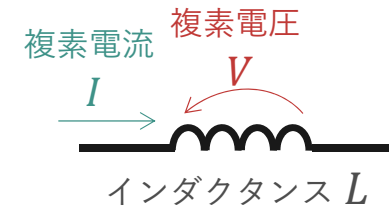
この式より,

$|V_m| = \frac{1}{\omega C} |I_m|$, 及び $\theta = \varphi + \frac{\pi}{2}$ が得られる.

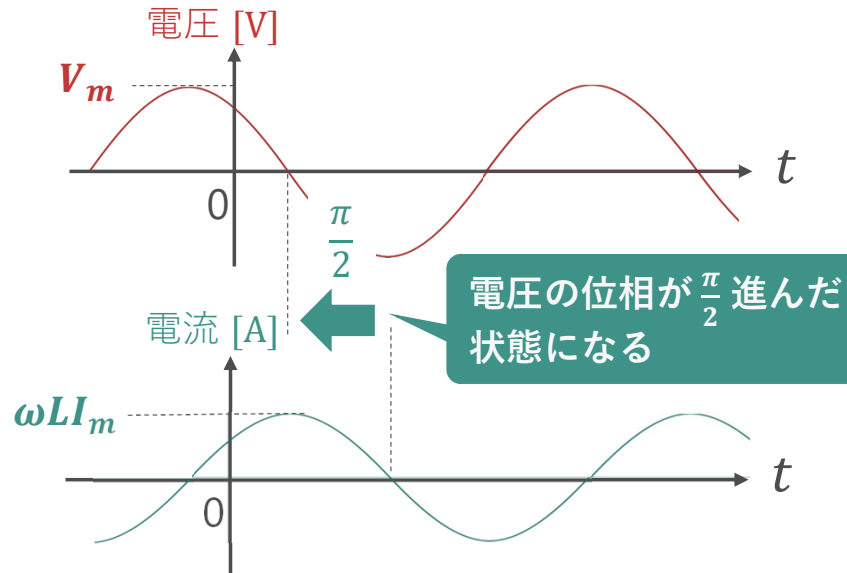
把握しておくべき電圧・電流特性：インダクタ

覚える

インダクタでは $V = j\omega LI$ が成立



電圧と電流の波形の関係



Q. なぜこの式が成り立つか？

A. 直流同様、全時刻で $v = L \frac{di}{dt}$ が成り立つから.

電圧を $v = V_m \sin(\omega t + \varphi)$,
電流を $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ とおく.

全時刻で $v = L \frac{di}{dt}$ が成り立つので,
 $|V_m| \sin(\omega t + \varphi) = \omega L |I_m| \cos(\omega t + \theta)$ 先週出てきた変換
 $= \omega L |I_m| \sin\left(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2}\right)$ である.

この式より,
 $|V_m| = \omega L |I_m|$, 及び $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$ が得られる.

抵抗 R ，キャパシタ C ，インダクタ L に電流 I が流れている場合のそれぞれの素子にかかる電圧を示せ。ただし，電源の角周波数は ω であるとする。

抵抗にかかる電圧 $V_R =$

キャパシタにかかる電圧 $V_C =$

インダクタにかかる電圧 $V_L =$

抵抗 R 、キャパシタ C 、インダクタ L に電流 I が流れている場合のそれぞれの素子にかかる電圧を示せ。ただし、電源の角周波数は ω であるとする。

抵抗にかかる電圧 $V_R = RI$

キャパシタにかかる電圧 $V_C = \frac{1}{j\omega C} I$

インダクタにかかる電圧 $V_L = j\omega LI$

覚えていれば今後の
解析は簡単！

$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega LI \end{aligned}$$

「 $j\omega LI$ 」さえ覚えてお
けば他を間違えにくい

3つの関係式はとっても大事

だから覚える

$$V = RI, \quad V = \frac{1}{j\omega C}I, \quad V = j\omega LI \text{ を覚えれば色々できる}$$

電流と電圧の位相ずれの関係が式からわかる

$$V = RI$$

実数を掛けているだけ
なので位相は同相

先週習った
内容です

$$V = \frac{1}{j\omega C}I$$

「 j で割る=位相を $\frac{\pi}{2}$ 遅らせる」
なので、 I に対して V の位相
は $\frac{\pi}{2}$ 遅れている

$$V = j\omega LI$$

「 j を掛ける=位相を $\frac{\pi}{2}$ 進める」
なので、 I に対して V の位相
は $\frac{\pi}{2}$ 進んでいる

電流を求める式にも普通の計算で変換できる

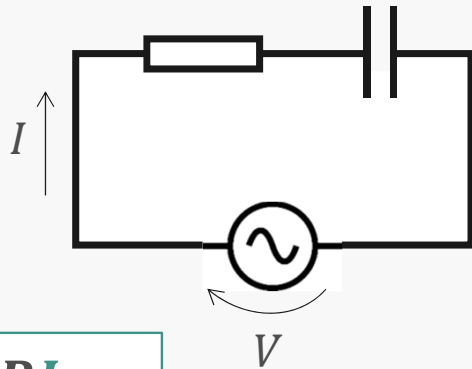
$$V = RI \Leftrightarrow I = \frac{1}{R}V$$

$$V = \frac{1}{j\omega C}I \Leftrightarrow I = j\omega CV$$

$$V = j\omega LI \Leftrightarrow I = \frac{1}{j\omega L}V$$

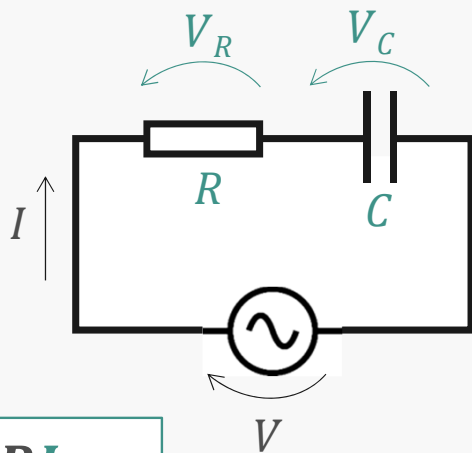
両方覚えると混乱
するのでこちら側
だけ覚えればよい

下に示す回路に流れる電流 I とその実効値，位相角を求めよ。ただし，電源（励振）電圧 V の位相角は 0，実効値は $|V|$ とする。



$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega L I \end{aligned}$$

下に示す回路に流れる電流 I とその実効値, 位相角を求めよ。ただし, 電源 (励振) 電圧 V の位相角は 0, 実効値は $|V|$ とする。



平衡則・保存則の立式

$$\begin{aligned} V &= V_R + V_C \\ &= RI + \frac{1}{j\omega C} I \\ &= \frac{1 + j\omega CR}{j\omega C} I \end{aligned}$$

$$\therefore I = \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR} V$$

複素数の乗除算として
複素電流が表現されて
いることに注目

実効値の計算

$$\begin{aligned} |I| &= \frac{|j\omega C|}{|1 + j\omega CR|} |V| \\ &= \frac{\omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} |V| \end{aligned}$$

位相角の計算

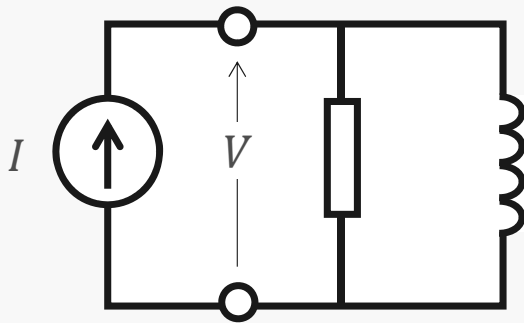
$$\begin{aligned} \angle I &= \angle(j\omega C) + \angle V - \angle(1 + j\omega CR) \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega CR) \end{aligned}$$

先週習った「複素数の乗除算
の場合, 実効値は掛け算と割
り算で求まる」を適用

先週習った「複素数の
乗除算の場合, 位
相角は足し算と引き
算で求まる」を適用

$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega L I \end{aligned}$$

下に示す回路の端子間電圧 V とその実効値，位相角を求めよ。ただし，電源（励振）電流 I の位相角は0とする。

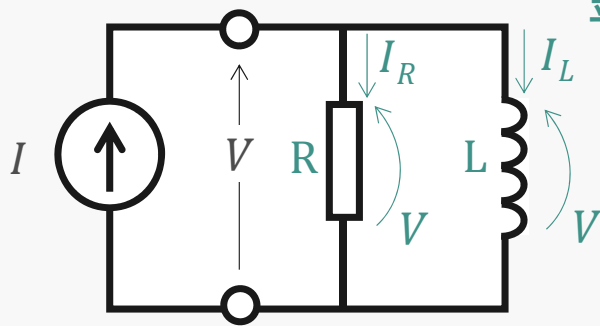


$$V = RI$$

$$V = \frac{1}{j\omega C}I$$

$$V = j\omega LI$$

下に示す回路の端子間電圧 V とその実効値, 位相角を求めよ。ただし, 電源 (励振) 電流 I の位相角は0とする。



平衡則・保存則の立式

$$\begin{aligned} I &= I_R + I_L \\ &= \frac{1}{R} V + \frac{1}{j\omega L} V \\ &= \frac{R + j\omega L}{j\omega LR} V \end{aligned}$$

$$\therefore V = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} I$$

実効値の計算

$$\begin{aligned} |V| &= \frac{|j\omega LR|}{|R + j\omega L|} |I| \\ &= \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} |I| \end{aligned}$$

位相角の計算

$$\begin{aligned} \angle V &= \angle(j\omega LR) + \angle I - \angle(R + j\omega L) \\ &= \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega L I \end{aligned}$$

練習問題を通じて気づいてもらいたい重要な事実

R , L , C は単体でも複数組み合わせ合わせた場合でも、
電圧と電流の関係式は $V = ZI$ の形式で表現できる

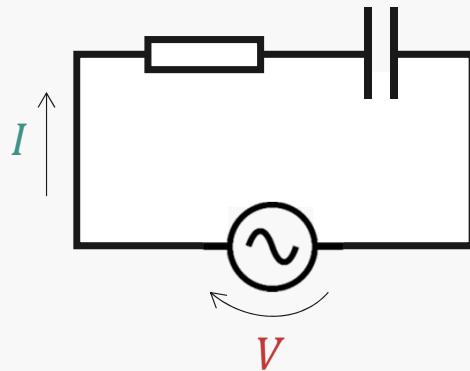
練習問題 1 の関係式

抵抗 $V = RI$

キャパシタ $V = \frac{1}{j\omega C} I$

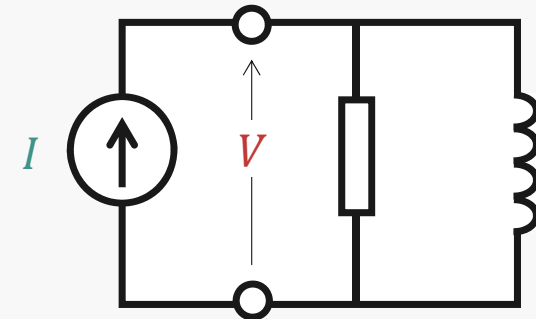
インダクタ $V = j\omega L I$

練習問題 2 の関係式



$$V = \frac{1 + j\omega CR}{j\omega C} I$$

練習問題 3 の関係式

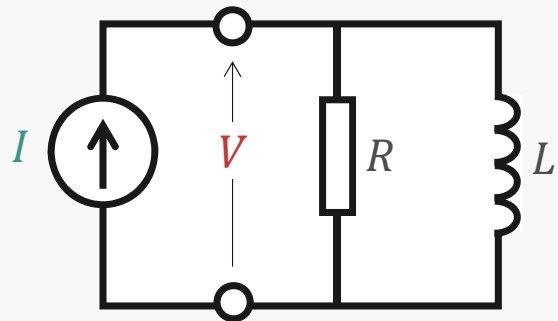


$$V = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} I$$

解析を簡単にする工夫

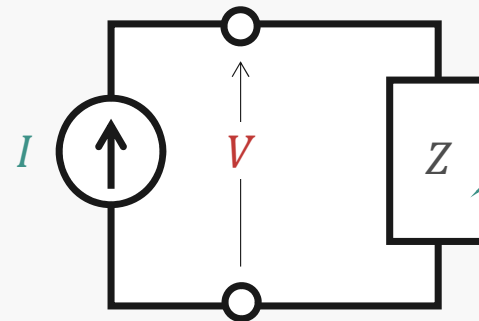
R , L , C の組み合わせパターン毎の Z を知っていれば
その部分の連立方程式を毎回解かなくて済む。
この $V = ZI$ の Z を複素インピーダンスと呼ぶ。

練習問題3の回路図と電圧・電流の関係式



$$V = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} I$$

練習問題3の回路図を Z で簡略化したもの



位相をずらしうる
特殊な抵抗のよう
に扱える

$$V = ZI$$

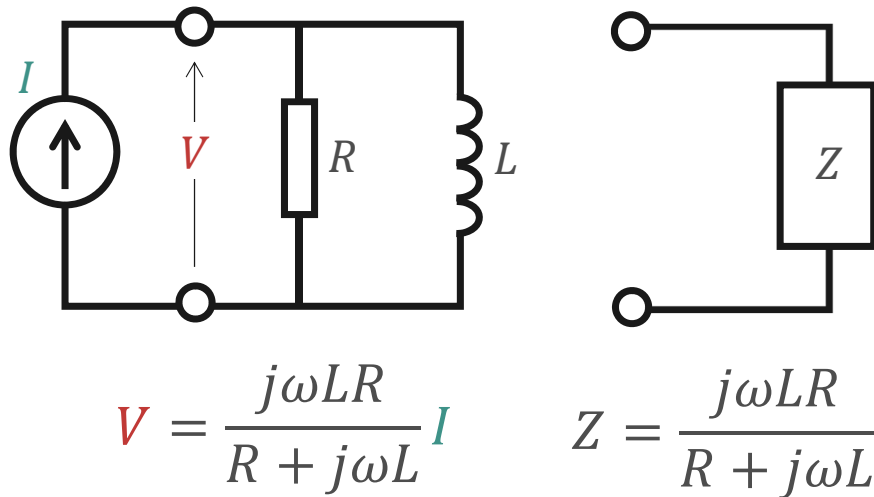
ここで, $Z = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L}$

解析において重要な性質

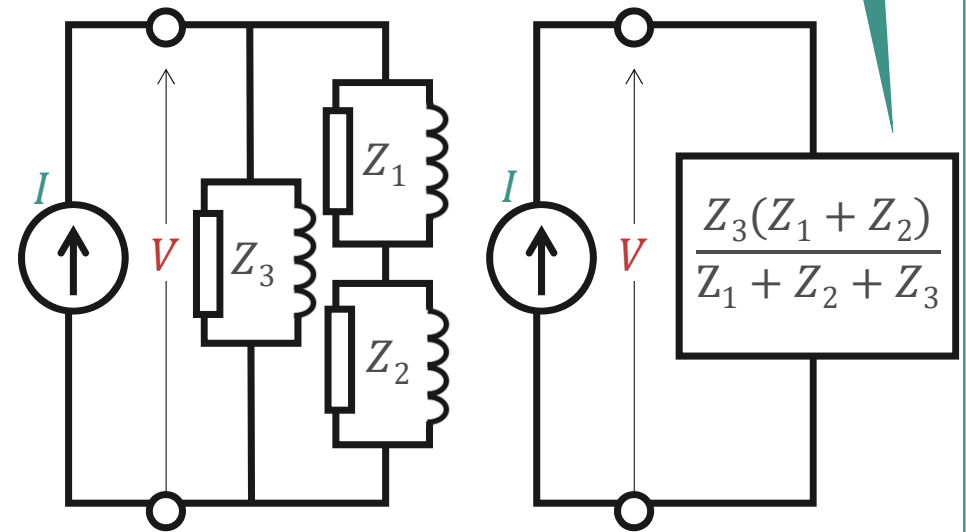
ある回路部の複素インピーダンスは、あたかも一つの抵抗値のように合成することができる

だから、回路パタン毎の複素インピーダンスを知っていれば解析は簡単

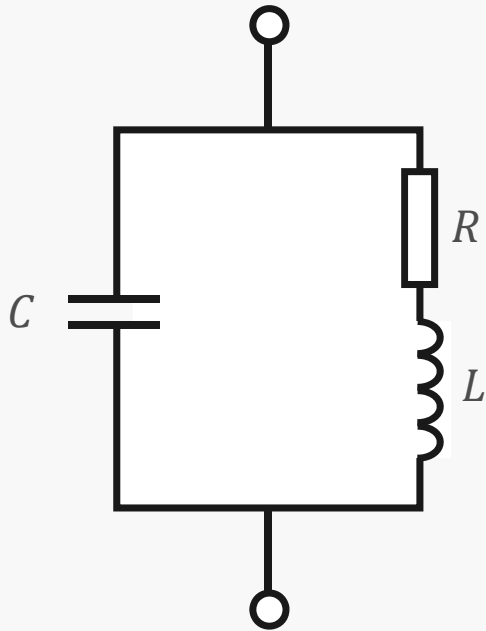
事前の解析で分かっている複素インピーダンス



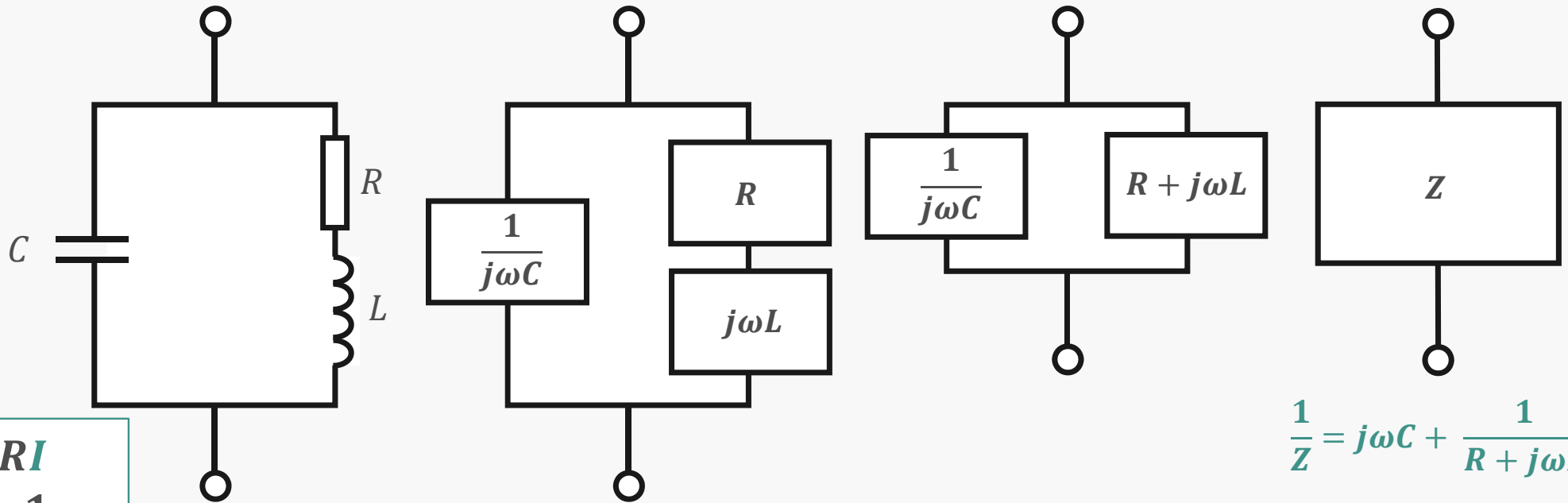
複雑な回路でも計算が単純



下に示す 1 端子回路の複素インピーダンス Z を求めよ.



下に示す 1 端子回路の複素インピーダンス Z を求めよ。



$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega L I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \\ \therefore Z &= \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 CL + j\omega CR} \end{aligned}$$

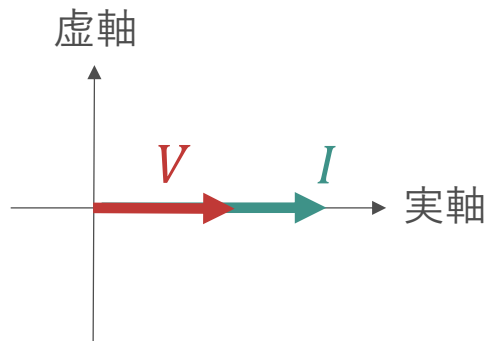
3つの関係式の理解を深めるために

素子ごとのフェーザ図もイメージできるように

抵抗における電圧・電流

$$V = RI$$

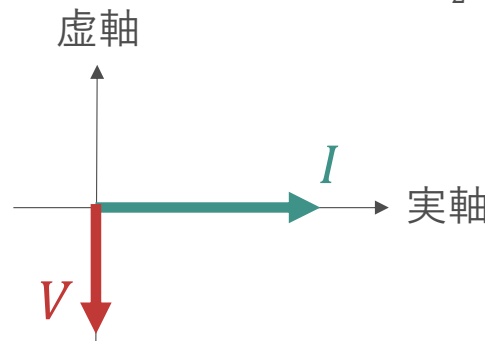
※ベクトルを実数倍



キャパシタにおける電圧・電流

$$V = \frac{1}{j\omega C} I$$

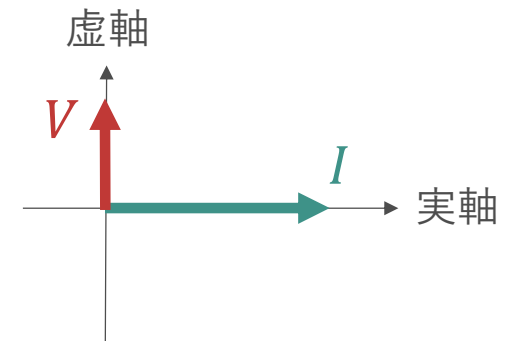
※ベクトルを実数倍して $-\frac{\pi}{2}$ 回転



インダクタにおける電圧・電流

$$V = j\omega L I$$

※ベクトルを実数倍して $\frac{\pi}{2}$ 回転

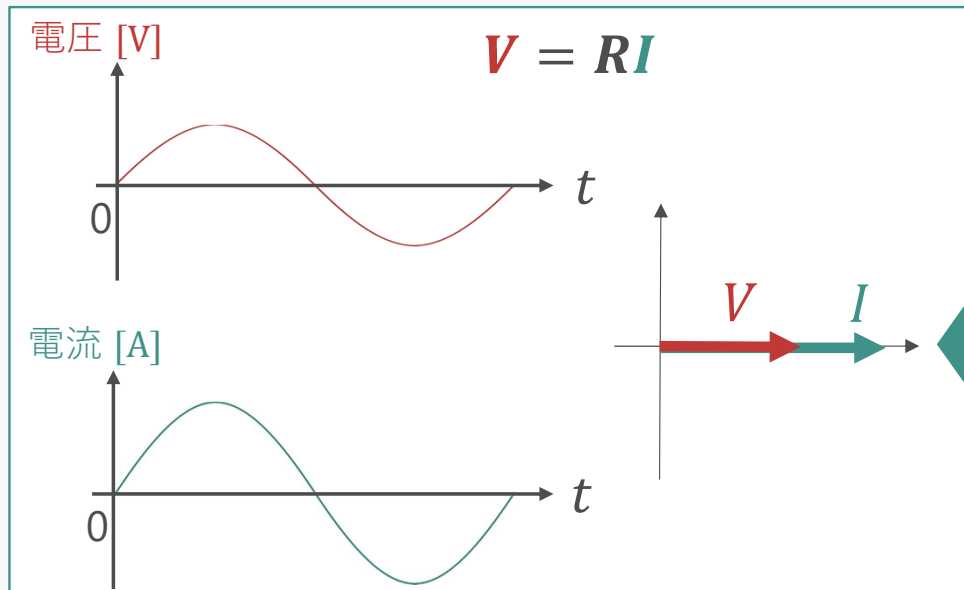


注意事項

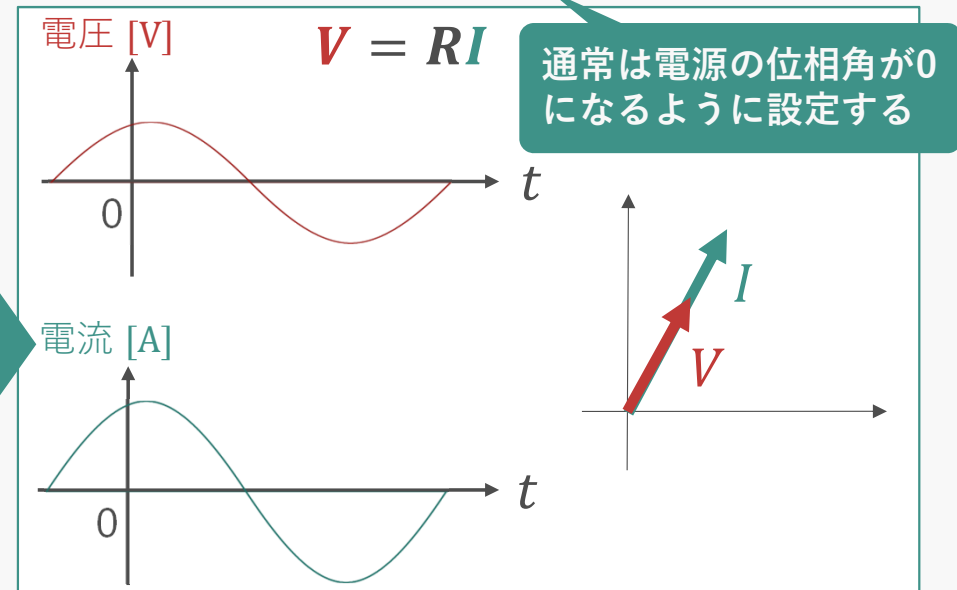
電圧と電流のフェーザは相対位置関係こそが重要

絶対位置に解析上の意味はない．相対位置関係は複素インピーダンスで決まる．

ある抵抗に流れる電流と電位差の変化の様子



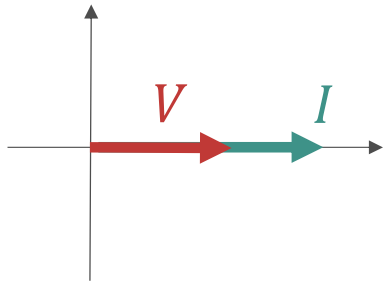
原点とする時刻の設定を変えただけ



下に示す電圧と電流のフェーザ図を参考にして、抵抗、キャパシタ、インダクタの複素インピーダンスのフェーザ図を描け

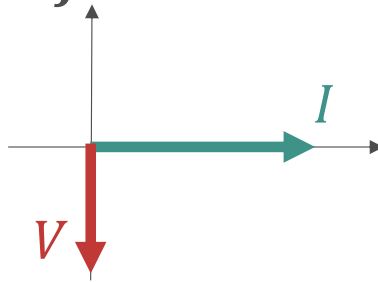
抵抗における電圧・電流

$$V = RI$$



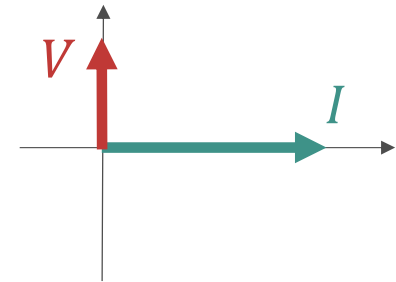
キャパシタにおける電圧・電流

$$V = \frac{1}{j\omega C} I$$

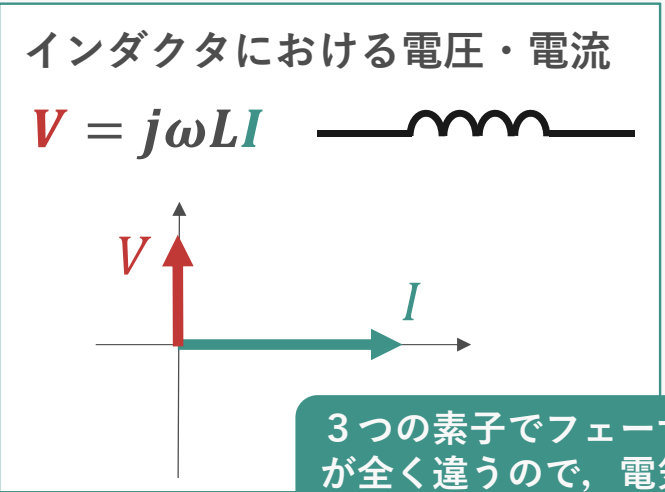
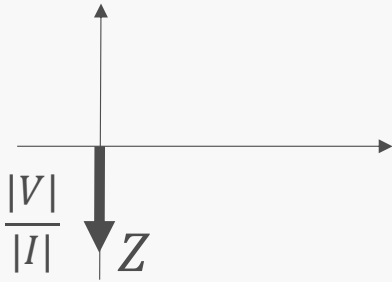
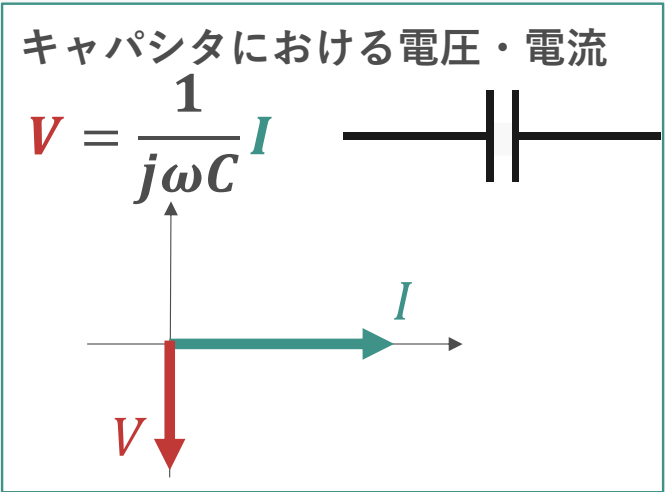
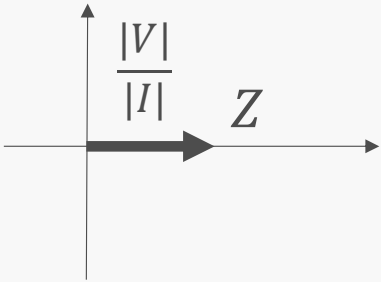
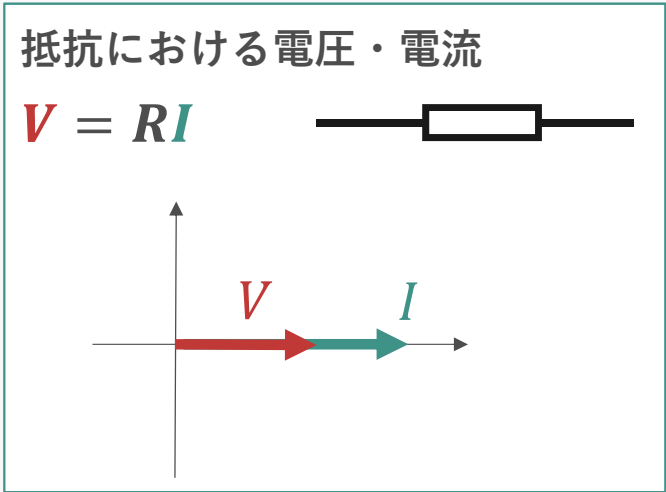


インダクタにおける電圧・電流

$$V = j\omega L I$$



下に示す電圧と電流のフェーザ図を参考にして、抵抗、キャパシタ、インダクタの複素インピーダンスのフェーザ図を描け

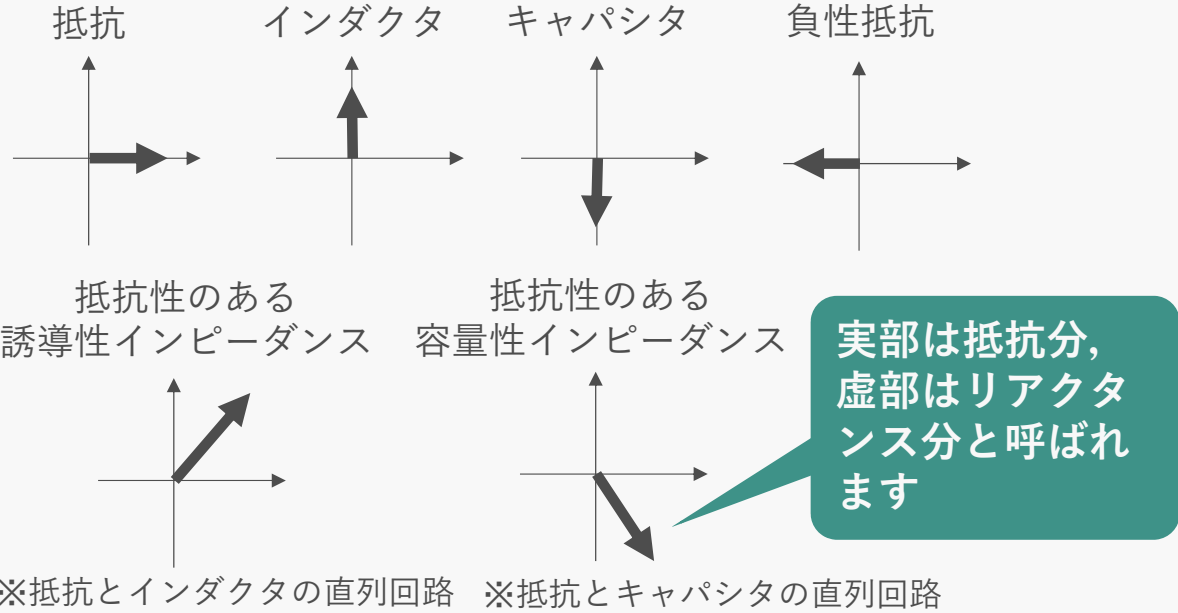
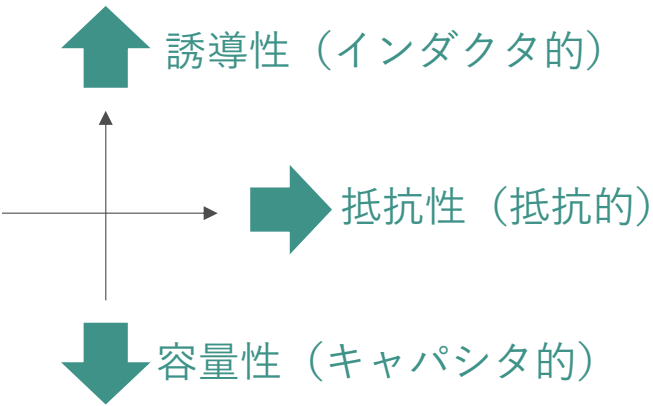


3つの素子でフェーザが全く違うので、電気的な影響が全く違うことが理解できますね

解析において重要な性質

複素インピーダンスのフェーザ図を見れば、その回路に抵抗，キャパシタ，インダクタの性質がどの程度含まれているか把握できる

複素インピーダンスのフェーザと性質の関係

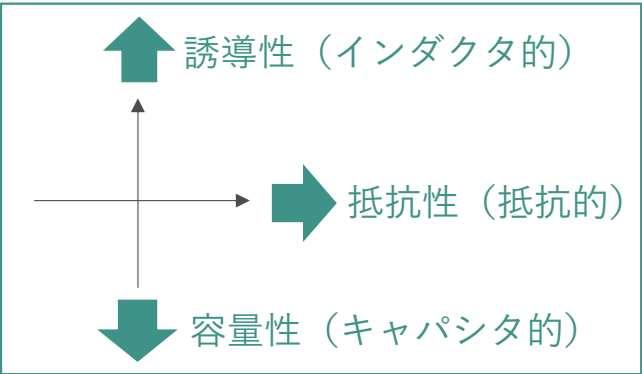
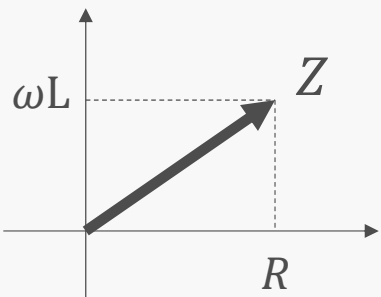


さらに

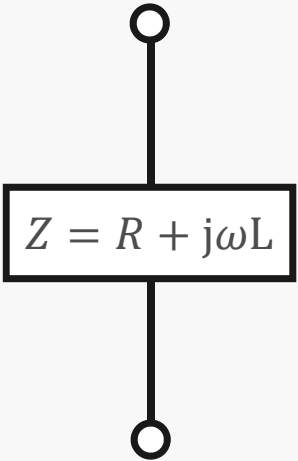
フェーザ図は大事ですね

複素インピーダンスのフェーザ図を見れば、
どんな回路に相当する回路なのかも分かる

この複素インピーダンス フェーザ図の位置は
を示す回路はどんなもの？ 「抵抗性と誘導性」を示している



複素インピーダンスを分解してみると、
抵抗とインダクタの直列回路と等価だと分かる



$$\begin{aligned} V &= RI \\ V &= \frac{1}{j\omega C} I \\ V &= j\omega LI \end{aligned}$$



本日学んでもらったこと

① 交流回路の解析の流れが直流回路解析と同じであること.

- ① 記号を書く
- ② 回路各部の電圧平衡則と電流保存則を立式
- ③ 各素子の電圧と電流の特性式を立式
- ④ 連立方程式を解く

② 解析においてはどのような連立方程式を立てることになるか.

- $V = RI$, $V = \frac{1}{j\omega C}I$, $V = j\omega LI$ 以外は直流解析と同じ

③ 解析を楽にする複素インピーダンスとは何か.

- ある回路部分の電圧と電流の関係式 $V = ZI$ の係数 Z . 位相も変える特殊な抵抗みたいなもの.

④ 複素インピーダンスを使った場合の回路解析はどのようなものか.

- 複素インピーダンスを抵抗のように扱って解析を単純化
- 複素インピーダンスの実部と虚部で性質（抵抗性・誘導性・容量性）を把握