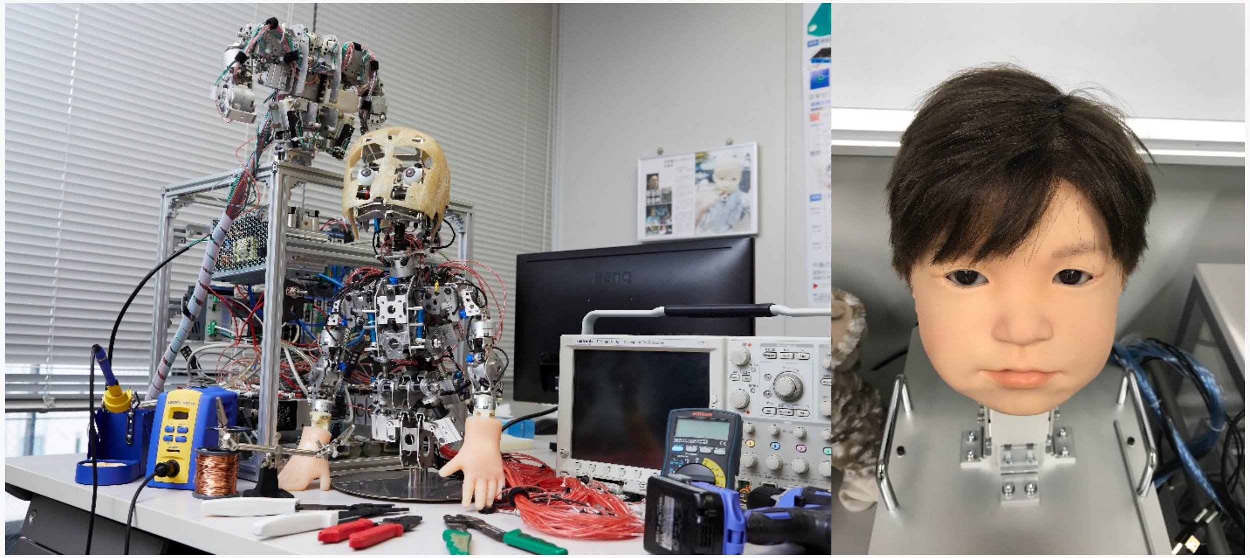
電気電子工学I



石原尚
機械工学専攻　講師（アンドロイド工学）

5/20, 27, 6/3, 10, 17の 5 回で交流回路を学びます

- 2　交流回路
  - **2.1　正弦波電圧・電流**
  - **2.2　正弦波電圧・電流の複素数表示**
    - **交流回路解析に必要な基礎知識（5/20）**
  - 2.3　交流回路の複素数領域における解析法
  - 2.4　簡単な回路の正弦波定常解析
    - 直流回路解析と類似した交流回路の基礎解析（5/27）
  - 2.5　複素インピーダンスと複素アドミタンス
  - 2.6　フェーザ図
  - 2.7　共振回路
  - 2.8　交流回路における電力
    - 交流回路ならではの特性の解析（6/3）
- 3　回路の諸定理
  - 3.1　回路の基本的性質
  - 3.2　重ね合わせの理
  - 3.3　テブナン等価回路とノートン等価回路
    - 交流回路の解析を簡単にする定理（6/10）
  - 3.6　ブリッジ回路
  - 3.7　整合
  - 3.8　電力と重ね合わせの理
    - 定理の応用例（6/17）

本日学ぶこと

① 交流回路とは何か．この講義ではどのような交流回路を扱うか．

② この講義では交流回路解析の何を学ぶか．

③ 交流回路はどのように表現されるか．

④ 交流回路の解析のためになぜ複素数がでてくるのか．

※講義中に練習問題を実施しますので，筆記具と紙の準備をお願いします

定義

交流回路

＝ **交流波形**の電圧や電流を発生する電源を備える回路

周期変動する波形

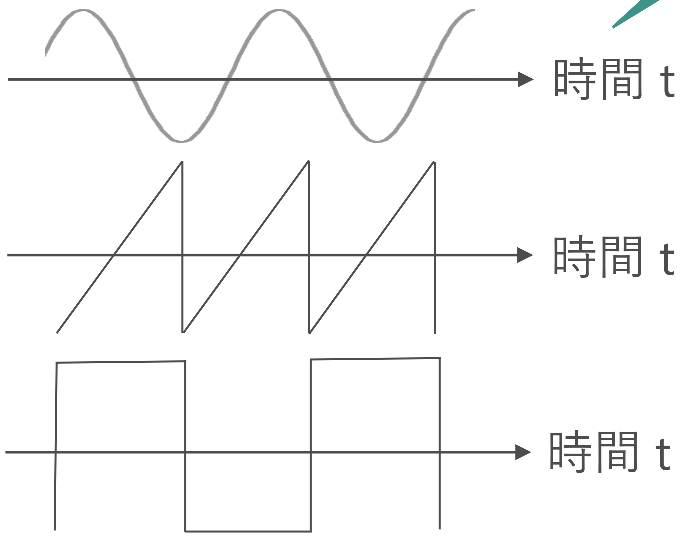
交流波形にも様々ある

これらが複数混ざった複雑な波形も交流波形

①**正弦波**

②**鋸波**

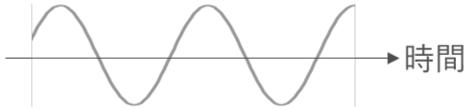
③**矩形波**



本講義で扱う交流回路

電源がsinもしくはcosで表現できるよ，ということ

正弦波定常状態にある回路
＝ **正弦波形**の電圧・電流を発生する電源を備え，
かつ**定常状態**となった回路



正弦波形に限定する理由
①**数学的に解析が容易だから**（三角関数の理論体系を利用可 & 微積分も正弦波）
②商用電源として最も一般的だから（家庭用電源は正弦波の交流電源）
③複雑な波形も正弦波の和として示されるから

定常状態に限定する理由
①**過渡状態の解析より簡単だから**
②回路機能の設計は定常状態を想定するから（電源投入直後は機能OFF）

- **今回理解してほしいこと**
  - 本講義で扱う交流回路は解析が単純なものに限定していること
  - **複素数の導入**によって，正弦波定常状態の**交流回路の解析が実現されている**こと
  - **フェーザ図**を描くことで**回路の状態を可視化**して理解できること
- **その上でできるようになってもらうこと**
  - 直流回路解析との**類似点・相違点を理解し，**正弦波定常状態の**交流回路の解析**（各部で電圧・電流がどんな状態になるか）ができること

基本の表現

交流回路の各部の電圧・電流は，時刻を変数とし，3つの特性値をもつ正弦関数で表現される

※違いに注意：直流回路の電圧・電流は，ある**値**で表現される

高校物理の復習

交流回路の電圧・電流の表現

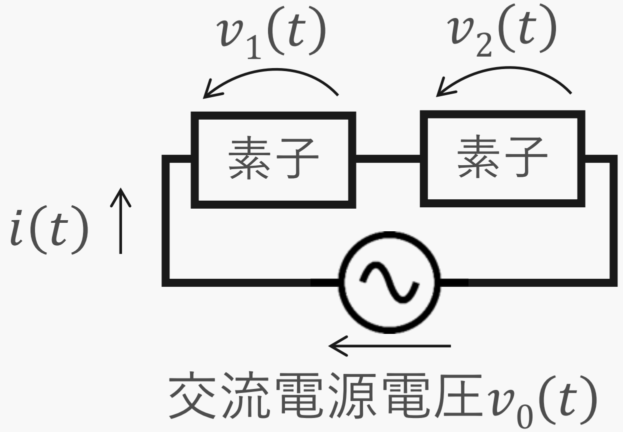
$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$

A_m：振幅 [V] or [A]

ω：角周波数 [rad/s]

θ：（初期）位相角 [rad]

回路各部の電圧・電流の状態は全てこの関数で表される



※(t)は自明なので通常省略

正弦関数の式と波形の対応は確実に理解しよう

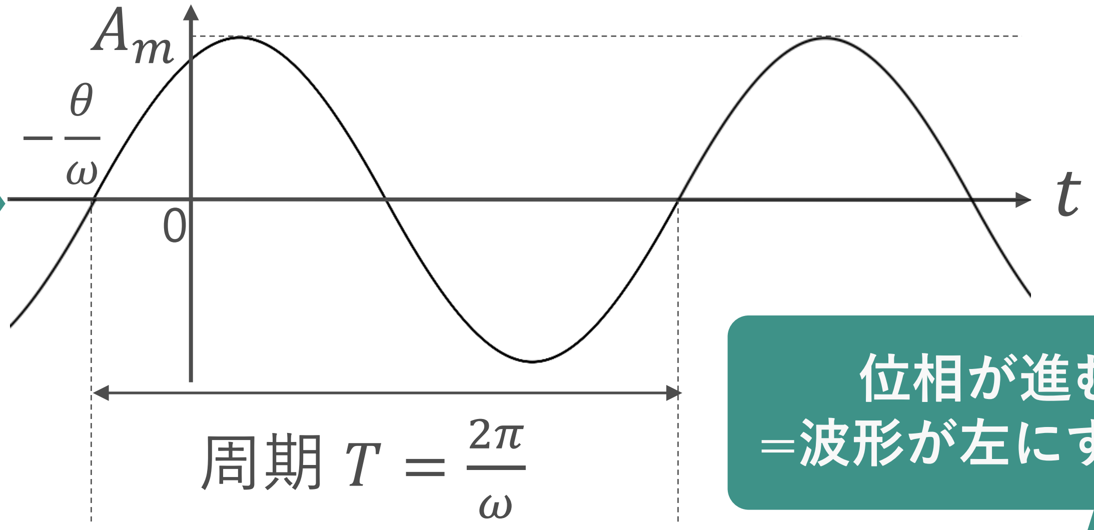
電圧・電流の正弦関数の式

$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$

- A_m：振幅 [V] or [A]
- ω：角周波数 [rad/s]
- θ：位相角 [rad]

一対一対応

電圧・電流の正弦関数の波形



位相が進む
=波形が左にずれる

覚える 振幅の代わりによく使われる

実効値 $|A_m| = \dfrac{A_m}{\sqrt{2}}$

※○○Vの交流はこちらの値

覚える 上記の波形は，$x(t) = A_m \sin(\omega t)$ に対して位相が **「θ進んでいる」と表現する**

※位相角の差が正の場合「進んでいる」
　負の場合「遅れている」
　差がない場合「同相である」

状況の限定による解析の簡易化

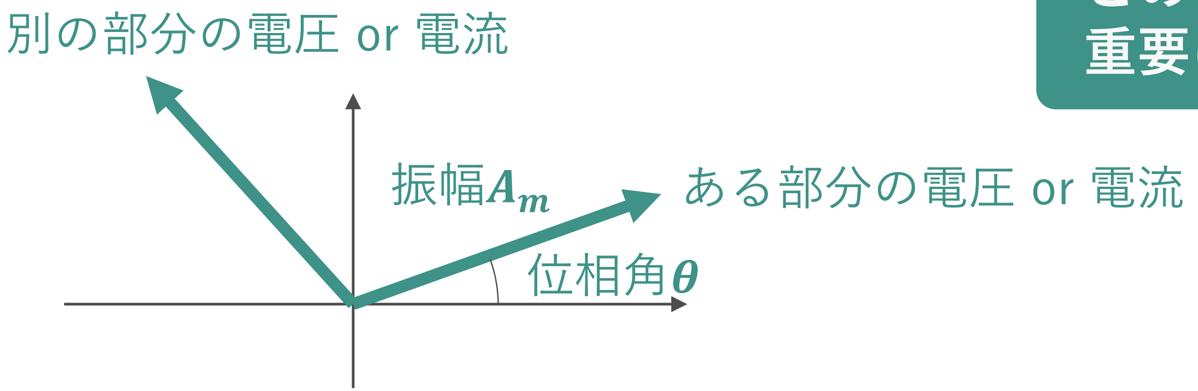
抵抗，インダクタ，キャパシタのみで構成される交流回路においては，各部の振幅A_mと位相角θの２つのみを解析すればよい

理由：これらの**３素子は角周波数ω**を変えないから

だから

回路各部の状態は極座標系で表現できる

このことが後で重要になります



解析のための工夫

正弦関数を，解析のための各種計算が有利な複素数に変換した上で，交流回路を解析する

波形のイメージに近い交流の表現

$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$

A_m

1対1対応

θ

解析に有利な交流の表現

大文字にするのが慣例

jは虚数単位
※iだと紛らわしいため

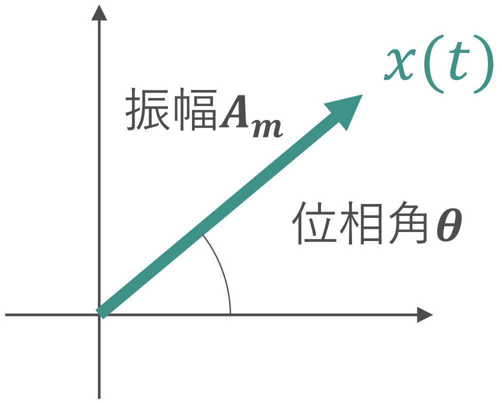
$$\mathrm{X} = |A_m| e^{j\theta}$$

振幅の「絶対値」でなく「実効値」であることに注意

なぜ正弦関数と複素数が対応するのか？

２次元平面上で振幅や位相角の状態や変化が一対一対応するから

正弦関数の極座標表示



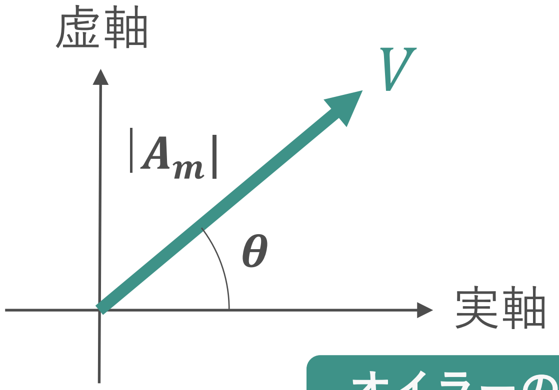
$$x(t) = A_m \sin(\omega t \pm \theta)$$

A_m

1対1対応

θ

複素数のフェーザ図での表示



$$V = |A_m| e^{\pm j\theta}$$

オイラーの公式

$$= |A_m| \cos\theta \pm j|A_m| \sin\theta$$

絶対覚える重要な関係

電圧と電流の関数形表示

$$x(t) = A_m \sin(\omega t + \theta)$$

振幅　位相角

$\longleftrightarrow$

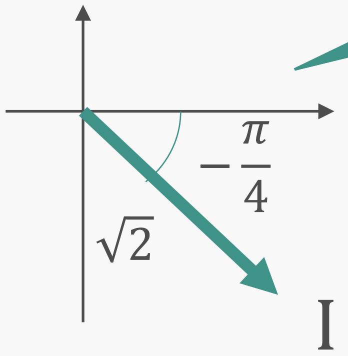
電圧と電流の複素数表示

$$\mathrm{X} = |A_m| e^{j\theta}$$

変換の例

$$i = 2\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \underset{\theta = -\frac{\pi}{4}}{\overset{A_m = 2}{\longleftrightarrow}} \quad \mathrm{I} = \sqrt{2} e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

後の解析のためには
フェーザ図も描ける必要あり



これをフェーザ I と呼ぶ

解析のために知っておくべき性質

正弦波の和（差）の複素数表示は，
個々の正弦波の複素数表示の和（差）となる

※ただし，角周波数が同じ場合に限る

変換の例

$$\underline{\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right)}+\underline{2\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)} \longleftrightarrow e^{j\frac{\pi}{3}}+2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$=e^{j\frac{\pi}{3}} \qquad =2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

直観通りの変換を
してもよいということ

交流回路解析に役立つ複素数表示のメリット①

正弦波の乗除算が簡潔

高校で習った指数計算の通りです

$$V_1 V_2 = |A_{m1}|e^{j\theta_1}|A_{m2}|e^{j\theta_2} = |A_{m1}||A_{m2}|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|A_{m1}|e^{j\theta_1}}{|A_{m2}|e^{j\theta_2}} = \frac{|A_{m1}|}{|A_{m2}|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$

変換の例

$$v_1 = \sqrt{2}\sin(\omega t) + 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow V_1 = 1 + 2e^{j\frac{\pi}{6}}$$

$$v_2 = 3\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \longleftrightarrow V_2 = 3e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

$v_1 v_2 =$ 計算も表記も面倒… $\longleftrightarrow V_1 V_2 = \underline{3e^{j\frac{2\pi}{3}} + 6e^{j\frac{5\pi}{6}}}$

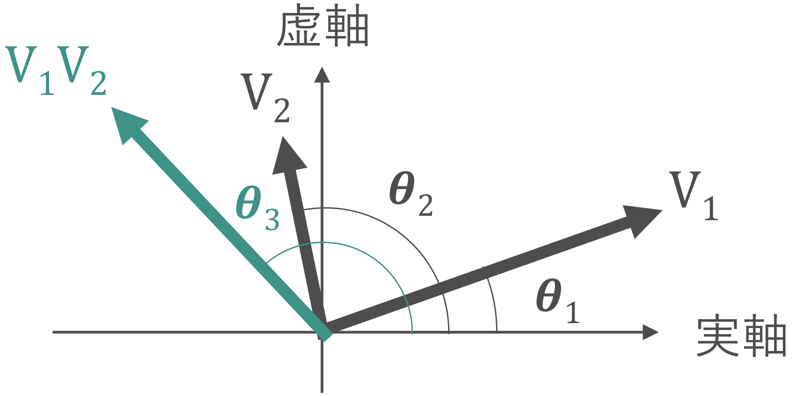
簡単な計算ですっきり書ける！

複素数への操作とフェーザの変化の関係①　※今回の授業の前のスライドの内容のおさらい

複素数の乗算は，実効値を掛け，位相角を足す操作
除算は，実効値を割り，位相角を減じる操作

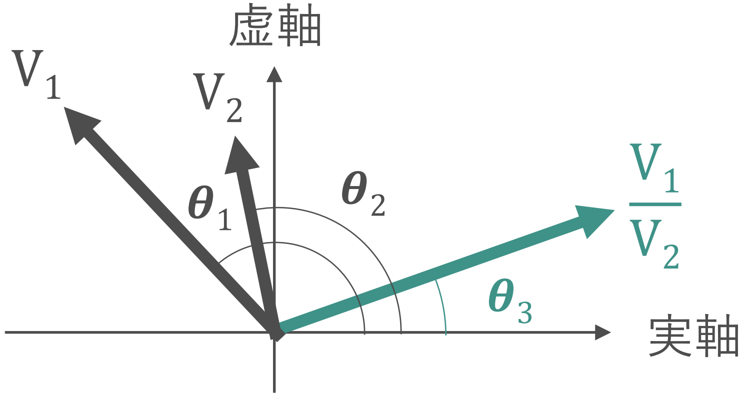
複素数の乗算とフェーザの関係

$$V_1V_2 = |A_{m1}|e^{j\theta_1}|A_{m2}|e^{j\theta_2}$$
$$= |A_{m1}||A_{m2}|e^{j(\theta_1+\theta_2)}$$



複素数の除算とフェーザの関係

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{|A_{m1}|e^{j\theta_1}}{|A_{m2}|e^{j\theta_2}} = \frac{|A_{m1}|}{|A_{m2}|}e^{j(\theta_1-\theta_2)}$$



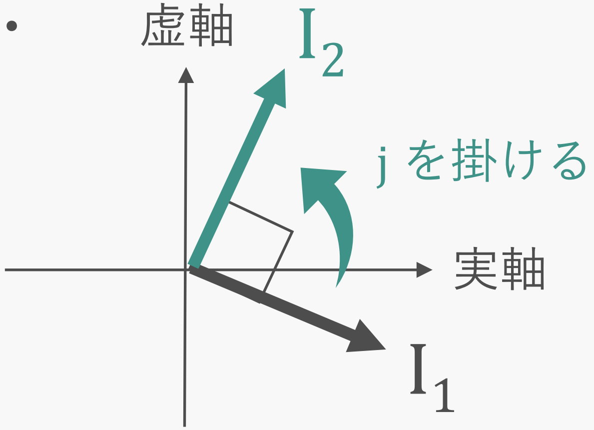
複素数への操作とフェーザの変化の関係②　※高校の範囲の復習

jを掛けると位相が $\frac{\pi}{2}$ 進み, jで割る（-jを掛ける）と位相が $\frac{\pi}{2}$ 遅れる

※ $\frac{1}{j}=\frac{j}{jj}=\frac{j}{-1}=-j$

交流電流 $\mathrm{I}_1=\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$ に対して位相が $\frac{\pi}{2}$ 進んだ電流は,

$\mathrm{I}_2=jI_1=j\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{6}}$ となる.



jを4回掛けるのは
1を掛けるのと同じなので
違和感はないですよね

交流回路解析に役立つ複素数表示のメリット②

インダクタやキャパシタの電圧・電流特性の計算で活躍します

複素数表示では，微分は$j\omega$を掛け，積分は$\frac{1}{j\omega}$を掛ける操作で済む

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X = j\omega X \qquad \int X = \frac{1}{j\omega}X$$

正弦関数の微分 ＝ 振幅をω倍し位相を$\frac{\pi}{2}$進める操作

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega t+\theta) = \omega\cos(\omega t+\theta) = \omega\sin\left(\omega t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

j を掛ける操作と同じ

正弦関数の積分 ＝ 振幅を$\frac{1}{\omega}$倍し位相を$\frac{\pi}{2}$遅らせる操作

$$\int\sin(\omega t+\theta)\mathrm{d}t = \int\sin\varphi\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}\right)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{\omega}\int\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{\omega}\cos\varphi + \mathrm{C} = \frac{1}{\omega}\sin\left(\omega t+\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{C}$$

j で割る操作

本日学んでもらったこと

① 交流回路とは何か．この講義ではどのような交流回路を扱うか

- 正弦波形の電源を持つ，抵抗，コンデンサ，キャパシタで構成される回路

② この講義では交流回路解析の何を学ぶか．

- 複素数の導入で解析が実現されていること
- フェーザ図を描くことで回路の状態を可視化して理解できること

③ 交流回路はどのように表現されるか．

- 実効値と位相角の 2 つの特性値を持つ正弦波．もしくは複素数．

④ 交流回路の解析のためになぜ複素数がでてくるのか．

- 微積分や乗除算などの計算が簡潔に実施できるから